相信各位无论是在竞赛还是在创新高考题中都见过如下的函数方程:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

这就是大名鼎鼎的柯西函数方程. 在各种常见条件 (如连续, 单调...) 的限制下, 可以得出 $f(x)=kx$. 然而, 没有这些条件约束下的解却经常被回避. 本文就从此问题出发, 简要介绍由看似显然成立的选择公理带来的病态解.

1 选择公理 (Axiom of Choice)

首先由于此病态解的存在性与选择公理 (下文简称为 AC) 有很大关联, 于是我们先来熟悉一下这个著名的公理.

读过测试逻辑的读者可能对 AC 最熟悉的形式是良序原理, 毕竟在测试逻辑中我们介绍过 ZFC 的一个模型—冯诺依曼宇宙 V, 其中每个集合都有对应序型. 不过, 此处我们先从 AC 最“显然”的形式出发, 并证明其常用的几个形式的等价性.

(AC′) 对一组非空集合 $\{A_i\}_{i\in I}(A_i\neq\emptyset)$, 它们的笛卡尔积 (定义如下) 非空.

$$\prod_{i\in I}A_i=\{f|f:I\to\underset{i\in I}{\cup}A_i,f(i)\in A_i\}\neq\emptyset$$

说实在, 没有接触过数学上无限的人可能会认为上述命题不可能不成立. 然而我们很容易证明它与以下命题, 即选择公理被提起时最常见的形式等价.

(AC) 对任意非空集合 X, 都有选择函数 $f:P(X)-\{\emptyset\}\to X$, 使得 $f(A)\in A$.

证明这两个命题等价非常简单, 留给读者自行完成.

下面是两个证明中经常用到的形式:

(佐恩引理) 对一个非空偏序集 $(X,<)$, 若其中任何一条链都有上界, 那么 P 中有极大 (maximal) 元素.

(良序原理) 任何集合都能排良序.

其中佐恩引理 (Zorn's Lemma, 下文简称为 ZL) 是证明的有力工具, 而良序原理 (Well-ordering Principle, 下文简称为 WOP) 通常与超限归纳结合起来使用. 下面我们来证明这三条命题的等价性.

(AC $\Rightarrow$ ZL) 假设 $(X,<)$ 不存在极大元素, 这里我们使用超限归纳来构造一条长度超过任意集合的链.

首先由选择公理, 存在 X 上的选择函数 f. 令 $a_0 = f(X)$, 由于 X 中没有极大元素, $F_0 = \{x : x > a_0\} \neq \emptyset$, 所以可以令 $a_1 = f(F_0)$, 此时 $\{a_0, a_1\}$ 是一条链. 对于 a_α 与链 $\{a_0, ..., a_\alpha\}$ 可以类似找到非空集合 $F_\alpha = \{x : x > a_\alpha\}$ 并令 $a_{\alpha+1} = f(F_\alpha)$, 那么 $\{a_0, ..., a_{\alpha+1}\}$ 依然是一条链.

对于非零极限序数 α 与已经定义好的一条链 $\{a_\beta : \beta < \alpha\}$, 这条链有一个上界, 令这个上界为 a_α; 由 α 为非零极限序数可以得出 $\forall\beta < \alpha(a_\alpha \neq a_\beta)$, 于是 $\{a_0, ..., a_\alpha\}$ 也是一条链.

这样我们在 X 中得到了一条长度与 On 相等的一条链, 然而 On 是一个真类, X 是一个集合, 矛盾!

(ZL $\Rightarrow$ WOP) 称要排良序的集合为 S. 我们取 ZL 中的偏序集为 S 的元素为所有可排良序的集合与它的良序组成的有序对. 即

$$X = \{(A, <_A) : A \subset S, <_A \text{ 为良序}\}$$

首先 X 非空, 因为 S 的一元子集有良序. 定义 X 上的偏序为 $(A, <_A) \prec (B, <_B)$ 当且仅当 $A \subsetneq B$ 且对 A 中任意 a, b 有 $a <_A b \Rightarrow a <_B b$. 于是事实上 $<_A = <_B \cap (A \times A)$.

我们先证明 X 满足 ZL 的条件: 对一个链 $\{(A_i, <_{A_i})\}_{i\in I}$, 它的一个显然的 "上界" 为 $\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i, <_{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}\right)$, 其中 $a <_{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} b$ 当且仅当存在某个 $<_{A_i}$ 使得 $a <_{A_i} b$, 即

$$<_{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} <_{A_i}$$

但为了证明这确实是上界, 我们需要说明这个有序对是 X 的元素, 即 $<_{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}$ 是良序. 不过这是简单的, 对 $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ 的一个非空子集 C, 肯定存在某个 $A_i \cap C \neq \emptyset$. 此时通过反证很容易说明 $A_i \cap C$ 的最小元素 (由 A_i 上的良序保证存在) 就是 C 的最小元素.

于是 X 有一个极大元素 $(S', <_{S'})$. 若存在 $x \in S - S'$, 那么 $(S' \cup \{x\}, <_{S' \cup \{x\}})$, 其中 $<_{S' \cup \{x\}} = <_{S'} \cup (S' \times \{x\})$, 也是 X 中的元素, 与 S' 的极大性矛盾. 所以 $S' = S$, 即 S 上有良序.

(WOP $\Rightarrow$ AC) 取 X 的一个良序 $<$, 对 X 的任意非空子集 A, 直接令 $f(A)$ 为 A 的最小元素.

至此我们已经证明了 AC, ZL 与 WOP 的等价性. 下面正式进入对柯西方程的讨论.

2 柯西方程的解的线性性 (Solutions as Linear Functions)

只是观察柯西方程的形式就能得到 $f(nx) = nf(x)$, 再将此式稍微变形一下又能得出 $f(\frac{x}{n}) = \frac{f(x)}{n}$, 于是对任意有理数 q 都有 $f(qx) = qf(x)$. 再加上原来的条件 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 我们发现, 这正是线性函数的定义! 只不过此处的 “向量空间” 为 $\mathbb{R}$, 而标量域为 $\mathbb{Q}$. 通过逐条带入定义 (即 $q(x+y) = qx + qy$, $(q+p)x = qx + px$ 之类) 容易验证 $\mathbb{R}$ 确实是 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间. 于是只要找到 $\mathbb{R}$ 的一组基, 再给这些基向量分配不成比例的函数值, 我们就能得到柯西方程的病态解!

3 任意向量空间的基 (Basis of Arbitrary Vector Space)

在线性代数的有限维向量空间中我们曾接触过 “极大线性无关组” 这个概念, 而对无限维向量空间, 基的特性亦是如此 (马上我们将会证明). 于是, 这启发我们使用 ZL 来寻找这个极大线性无关组, 并证明它就是基.

称线性空间为 S. 承认 AC, 我们令偏序集为 X 的元素为 S 上的线性无关组, 偏序为 $\subsetneq$. 对 X 中的任何一条链 $\{A_i\}_{i \in I}$, 显然 $A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, 于是我们要证的就是 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 也是线性无关组. 若否, 有线性相关的 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$, 其中 $\boldsymbol{a}_j \in A_{i_j}$ (i_j 可以相等). 然而由于 $\{A_i\}_{i \in I}$ 为一条用 $\subsetneq$ 连接的链, 必有某个 $A_{i_k} = A_{i_1} \cup ... \cup A_{i_n}$, 而 A_{i_k} 又是线性无关组, 与 $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ 线性相关矛盾.

这样一来, 每条链都有上界, 于是有极大线性无关组 B, 我们只要证明 $S=\mathrm{span}(B)$. 假设存在 $\boldsymbol{t}\in S-\mathrm{span}(B)$. 对 B 的任意有限子集 $\{\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_n\}$, 考虑方程

$$x_1\boldsymbol{b}_1+...+x_n\boldsymbol{b}_n+x_{n+1}\boldsymbol{t}=0$$

若 $x_{n+1}\neq 0$, 就有 $\boldsymbol{t}=-\frac{x_1}{x_{n+1}}\boldsymbol{b}_1-...-\frac{x_n}{x_{n+1}}\boldsymbol{b}_n$, 与 $\boldsymbol{t}\notin\mathrm{span}(B)$ 矛盾. 于是 $x_{n+1}=0$, 由 $\{\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_n\}$ 线性无关可得到 $x_1=...=x_n=0$. 这意味着上述方程只有零解, 即 $\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_n$ 与 t 线性无关. 又因为 $\{\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_n\}$ 是 B 的任意有限子集, $B\cup\{\boldsymbol{t}\}$ 也是线性无关组, 与 B 的极大性矛盾. 于是 B 是 S 的一组基.

4 正式构造与题外话 (Construction and Digression)

取 $\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的一组基 $\{b_i\}_{i\in I}$, 并令 $f(b_i)=b_i(i\neq 1), f(b_1)=2b_1$, 对 $\{b_i\}_{i\in I}$ 的任意有限子集 $\{b_{a_1},...,b_{a_n}\}$ 与任意有限有理数序列 $(p_1,...,p_n)$, $f(p_1b_{a_1}+...+p_nb_{a_n})=p_1f(b_{a_1})+...+p_nf(b_{a_n})$, 构造就完成了, 显然不存在常数 k 使得 $f(x)=kx$. 对于任意两个实数

$$x=\sum_{i=1}^{n_x}p_ib_{x_i}$$

$$y=\sum_{i=1}^{n_y}q_ib_{y_i}$$

调整 b_{x_i} 与 b_{y_i} 的次序并加上有限个系数为 0 的项使得 $x_i=y_i$ 且 $n_x=n_y$ 相等, 那么

$$f(x+y)=f\left(\sum_{i=1}^{n_x}p_ib_{x_i}+\sum_{i=1}^{n_x}q_ib_{x_i}\right)=\sum_{i=1}^{n_x}(p_i+q_i)f(b_{x_i})$$

$$f(x)+f(y)=f\left(\sum_{i=1}^{n_x}p_ib_{x_i}\right)+f\left(\sum_{i=1}^{n_x}q_ib_{x_i}\right)=\sum_{i=1}^{n_x}p_if(b_{x_i})+\sum_{i=1}^{n_x}q_if(b_{x_i})$$

上两式相等, 符合条件.

下面是一些题外话. 首先是病态解的特性: 这类函数的图像在 $\mathbb{R}^2$ 上是稠密的. 这是一个十分惊人的结论, 因为通常函数图像的闭包就是原图像加

上几个点而已, 而这类函数的闭包直接达到了整个平面! 尽管惊奇, 这个命题的证明还是较为简单的, 或许可以作为分析的小练习. 除开对柯西方程本身的讨论, 在证明任何向量空间均有基的时候, 不知各位是否想起了向量空间维度的定义: 基的大小. 没错, 事实上可以证明即使在无限维线性空间中两个基依然是等势的, 于是基的基数就可作为无限维向量空间的维度, 称为 Hamel 维度或代数维度. 不过很多时候完整的基并不好找 (比如 $\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的基不可构造), 于是数学家们通常只考虑 (带拓扑的) 空间某些稠密子空间的易于描述的基, 比如 $L^2([0,1])$ 上由 $e^{2\pi in}$(对应着傅里叶级数) 构成的正交基.